Ответы и решения задач «зелёного» уровня сложности MathCat.ONLINE

Задача 1. (6 баллов) Оля, Коля, Толя, Поля и Лиля хотят купить себе по мороженому. Оле не хватает для покупки 17 рублей, Коле – 9 рублей, Толе – 5, Поле – трёх, а Лиле – одного рубля. Если они сложат все свои деньги, то им всё равно не хватит для покупки даже трёх порций. Сколько стоит порция мороженого (известно, что она стоит целое число рублей)?

Ответ: 17.

Решение: Всем вместе не хватает 35 рублей до пяти порций. Так как до трёх порций им тоже не хватает, то две порции стоят меньше 35 рублей, а значит, одна порция – меньше 18. Но так как Оле не хватало до порции 17 рублей, то порция не может стоить меньше 17. Таким образом, порция мороженого стоит ровно 17 рублей.

Задача 2. (7 баллов) На листке были написаны числа от 1 до 20. Потом листок разрезали на несколько кусков (ни одно число не оказалось разрезанным) и на каждой части подчеркнули наибольшее число. Сумма подчёркнутых чисел оказалась равной 35. Какое наибольшее число кусков могло быть?

Ответ: 6.

Решение: Если на одном куске подчеркнуто 20, а на других – числа от 1 до 5, то сумма будет равна 35. При ещё большем числе кусков сумма точно больше.

Задача 3. (7 баллов) Вася ходил в библиотеку семь раз. Первый раз он пошёл туда в воскресенье, а каждое посещение, начиная со второго, приходилось на следующий по алфавиту день недели. Сколько дней прошло между первым и последним походом Васи в библиотеку?

Ответ: 25.

Решение: Выпишем дни в алфавитном порядке: *воскресенье*, *вторник*, *понедельник*, *пятница*, *среда*, *суббота*, *четверг*. В одну и ту же неделю Вася ходил в воскресенье и вторник (если считать, что неделя началась с воскресенья), в понедельник и пятницу, а также в среду и субботу. Итого между первым воскресеньем и последним четвергом прошло три недели и ещё четыре дня – всего 25 дней.

Задача 4. (9 баллов) На каждой грани куба написано натуральное число. Три из них показаны на рисунке, а про остальные три известно, что они простые. Кроме того, суммы чисел на противоположных гранях равны. Чему равна сумма всех чисел на кубе?
(См. рис. 1)

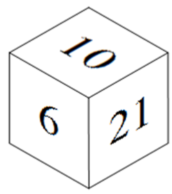


Рисунок 1

Ответ: 69.

Решение: Числа на видимых гранях куба не все одной чётности, поэтому и среди чисел на невидимых гранях есть хотя бы одно чётное. Но единственное чётное простое число – это 2, и оно может быть написано только напротив наибольшего из видимых чисел, то есть напротив 21. Значит, сумма чисел на противоположных гранях равна 23, а сумма всех чисел на кубе – $23 \cdot 3 = 69$. Остальные простые числа – это $23 - 10 = 13$ и $23 - 6 = 17$.

Задача 5. (9 баллов) В стране 100 жителей, некоторые из которых всегда говорят правду, а остальные всегда врут. Каждому нравится ровно один жанр фильмов: детектив, мелодрама или боевик. Все жители ответили на три вопроса:
1) Нравятся ли вам детективы?
2) Нравятся ли вам мелодрамы?
3) Нравятся ли вам боевики?
На первый вопрос утвердительно ответили 37 человек, на второй – 40, на третий – 42. Сколько лжецов живёт в стране?

Ответ: 19.

Решение: Обозначим количество лжецов через x. Каждый из них два раза ответил утвердительно (про оба жанра, кроме того, который ему действительно нравится). Каждый из остальных $100 - x$ жителей ответил утвердительно один раз, поэтому всего положительных ответов было $2x + 100 - x = x + 100$. По условию это число равно $37 + 40 + 42 = 119$, откуда $x = 19$.

Задача 6. (10 баллов) Два куба, состоящие из 27 кубиков каждый, расположены так, что имеют ровно один общий кубик. Из скольких квадратиков состоит поверхность такой фигуры?

Ответ: 102.

Решение: Несложно понять, что два куба могут иметь один общий кубик, только если этот кубик является угловым в обоих кубах. Поверхность каждого куба состоит из $9 \cdot 6 = 54$ квадратиков. При составлении фигуры в каждом кубе невидимыми становятся три квадратика, примыкающие к одной вершине, поэтому площадь поверхности фигуры равна $54 \cdot 2 - 3 \cdot 2 = 102$.

Задача 7. (12 баллов) На доске написано натуральное число. Оказалось, что между некоторыми его цифрами можно поставить знаки умножения (хотя бы один) так, что значение полученного выражения будет равно 200. Какое наименьшее число может быть написано на доске?

Ответ: 258.

Решение: Если одним из сомножителей является само число 200, то нужен ещё хотя бы один сомножитель, и тогда число на доске имеет не менее четырёх цифр.
Если количество множителей не менее трёх, а число на доске состоит меньше чем из четырёх цифр, то все множители однозначны, то есть равны 5, 5 и 8. Наименьшее возможное число при этом равно 558, но оно больше 258. Если же множителей ровно два, то меньший из них должен быть однозначным, и остаётся выбрать лучший вариант среди $40 \cdot 5$, $4 \cdot 50$ и $25 \cdot 8$.

Задача 8. (12 баллов) На гипотенузе AB прямоугольного треугольника ABC отметили точку D, а на катете BC – точку E. Чему может быть равен угол EDC, если $\angle B = 35°$, $\angle BCD = 20°$ и $\angle BAE = 10°$? Ответ дайте в градусах.

Ответ: 80°.

Решение: Из условия следует, что $\angle A = 90° - \angle B = 55°$. Угол ADC является внешним к треугольнику BDC, поэтому $\angle ADC = \angle B + \angle BCD = 55°$. Значит, треугольник ACD равнобедренный, то есть $AC = DC$.
Заметим, что $\angle CAE = \angle A - \angle BAE = 45°$. Следовательно, треугольник ACE прямоугольный равнобедренный, откуда $AC = EC$.
Таким образом, $DC = EC$, поэтому треугольник DCE равнобедренный и $\angle EDC = (180° - \angle ECD):2 = 80°$.

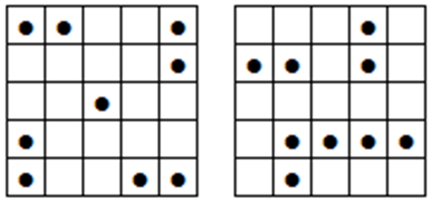
Задача 9. (13 баллов) В футбольном матче встретились две команды по 11 игроков в каждой. Средний возраст игроков одной из команд был на 1 год больше среднего возраста игроков другой. После того как в каждой команде было удалено по одному футболисту, средние возрасты игроков двух команд сравнялись. На сколько один из удалённых игроков мог быть старше другого?

Ответ: 11.

Решение: Из условия следует, что сначала сумма возрастов игроков первой команды была на 11 лет больше суммы возрастов игроков второй. После удаления футболистов суммы сравнялись, значит, удалённый игрок первой команды старше удалённого игрока второй команды на 11 лет.

Задача 10. (15 баллов) В каждой клетке доски 5×5 стоит по фишке. Каждую фишку переставили на соседнюю по стороне клетку. Какое наибольшее количество клеток могло оказаться пустыми после этого?

Ответ: 16.



Решение: Девять фишек, отмеченных на рисунке слева, займут разные клетки, поэтому пустыми могут оказаться не более $25 - 9 = 16$ клеток. С другой стороны, все фишки можно собрать на девяти клетках, отмеченных на рисунке справа.