Ответы и решения задач «красного» уровня сложности MathCat

1. **(5 баллов)** Запустив в полдень двое часов, Коля обнаружил, что одни из них отстают на 2 минуты в час, а другие спешат на 1 минуту в час. Когда Коля вновь посмотрел на часы, то увидел, что спешившие часы показывают на 1 час больше. В какое время Коля взглянул на часы?

Ответ: в 8:00
Решение: Разница показаний часов растет на 3 минуты за каждый час. Поэтому 1 час разницы накапливается за 20 “настоящих” часов (а если разница в показаниях часов на самом деле означает не 1 час, а 13, 25 или еще большее количество, то это соответствует еще 240 настоящим часам, то есть ровно 10 суткам - и не влияет на значение ответа). Время через 20 часов после полудня - это 8:00 утра следующего дня.

2. **(7 баллов)** В вагоне электрички ехало менее 100 человек, при этом стояло вдвое больше, чем сидело. На остановке 4% пассажиров сошли. Сколько человек осталось в вагоне?

Ответ: 72
Решение: Условие утверждает, что количество человек в вагоне делится на 3 (так как сидела ровно треть пассажиров) и делится на 25 (так как сошла на остановке 1/25 часть всех пассажиров). Единственное число, меньшее 100, удовлетворяющее обоим этим условиям, - это 75. После остановки в вагоне остались 75 - 3 = 72 пассажира.

3. **(8 баллов)** Алёша, Боря, Ваня и Гриша соревновались в беге. На вопрос, кто какое место занял, они ответили следующее. Алёша: «Я не был ни первым, ни последним». Боря: «Я не был последним». Ваня: «Я был первым». Гриша: «Я был последним». Известно, что три из этих ответов правильные, а один – неверный. Кто пришел к финишу первым? Алёша – поставьте 1, Боря - поставьте 2, Ваня - поставьте 3, Гриша – поставьте 4.

Ответ: Боря (2)
Решение: Трое мальчиков заявили, что не были последним. Если бы все они говорили правду, то последнее место должно быть у Гриши, - но тогда и он сказал правду. Значит, один из первых трёх мальчиков сказал неправду. Тогда Гриша точно сказал правду и был последним. Следовательно, Боря тоже сказал правду. Если бы правду говорил и Ваня, то он первый, а значит, Алёша и Боря тоже сказали бы правду. Поскольку по условию один мальчик соврал, то это - Ваня. Следовательно, первым пришел не он и не Алёша, а Боря.

4. **(10 баллов)** Биссектрисы углов C и D трапеции ABCD делят ее основание AB на три равных части. Может ли диагональ AC быть впятеро больше, чем BD? Да - поставьте 1, Нет – поставьте 0.

Ответ: Нет (0)
Решение: Из свойств биссектрисы и трапеции следует, что боковые стороны равны ⅔ AB или ⅓ AB. По неравенству треугольника меньшая диагональ больше чем ⅓ AB, а большая - меньше 5/3 AB, поэтому отношение длин диагоналей меньше 5.

5. **(10 баллов)** Компания собиралась в кафе. Каждый раз, когда приходила девушка, все присутствующие мужчины выпивали в её честь по стакану яблочного сока, а когда приходил мужчина - все девушки, приветствуя его, выпивали по стакану вишнёвого сока. Сколько, самое меньшее, людей могло собраться в кафе, если официант (не участник этой компании) наливал сок 154 раза?

Ответ: 25
Решение: Для каждой пары (мужчина, женщина) официант наливал сок ровно один раз - это был вишнёвый сок для девушки, если мужчина пришёл после неё, или яблочный сок для мужчины, если он пришёл раньше. Поэтому 154 - это произведение числа мужчин на число девушек на вечеринке. Так как 154=2*7*11, то возможные варианты произведений - это 1*154, 2*77, 7*22 и 11*14. Наименьшему числу гостей соответствует последний из вариантов.

6. (10 баллов) Калькулятор имеет четыре кнопки: две жёлтые – «+2» и «-2» и две красные - «x3» и «:3» (последняя работает, только если число на экране делится на три). Запрещается три раза подряд нажимать на жёлтые кнопки. Сколько существует трехзначных чисел, которые можно получить, имея на входе «2020»?

Ответ: 450

Решение: Заметим, что все операции с кнопками обратимы - если число X можно получить из числа Y, то действуя наоборот, можно из числа X получить Y. Теперь покажем, что из любого чётного натурального числа можно получить число 2. Действительно, будем уменьшать число, деля его на 3, если это возможно, или вычитая 2 (или 2+2), если само число не делится на 3. После одного или двух вычитаний число окажется кратным 3, и его можно будет разделить на 3, а следовательно, получить меньшее натуральное число. Ясно также, что все промежуточные числа чётные, поэтому в конце концов может получиться только наименьшее чётное число, то есть 2. Теперь, зная, что из 2020 можно прийти к 2 и из любого чётного трёхзначного можно получить 2, мы видим, что из 2020 можно получить любое чётное трёхзначное. Всего трехзначных чисел 900, ровно половина из них - чётные.

7. (10 баллов) На доске написаны несколько различных целых чисел. Произведение двух наибольших из них равно 420, а произведение двух наименьших - вдвое меньше. Какое наибольшее количество чисел может быть на доске?

Ответ: 37

Решение: Максимум получается, если на доске написаны все подряд числа от -15 до +21. (Произведение двух наименьших в таком наборе - положительно и равно 210.) Ясно, что между наименьшими и наибольшими можно брать все числа подряд, поэтому вопрос сводится к тому, насколько большим может быть второе наибольшее число и насколько маленьким - второе наименьшее. Оценка второго наибольшего числа делается так: если оно равно x, то наибольшее - больше x, поэтому $x^2 < 420$, наибольшее возможное целое значение x=20. Аналогично для второго наименьшего $y^2 < 210$, наименьшее целое значение y=-14.

8. (12 баллов) Как вставить на пустые места цифры 2,3,4,7,8,9 (каждую разрешается использовать один раз), чтобы получилось верное равенство? В ответе запишите цифры в нужном порядке как одно шестизначное число. Из всех возможных шестизначных чисел укажите наибольшее.

$$1/(\_\_ + \_\_) + 5/(\_\_ + \_\_) + 6/(\_\_ + \_\_) = 1$$

Ответ: 428793

Решение: Чтобы сумма оказалась настолько маленькой, у дробей с большими числителями должны быть довольно большие знаменатели, а знаменатель первой дроби, наоборот, должен быть маленьким. Самая маленькая для этого возможность - это 1/(2+3), но это не даёт единицу в сумме, в чем легко убедиться перебором вариантов для представления 4+7+8+9 в виде суммы двух слагаемых (11+17 или 12+16 или 13+15 - во всех случаях знаменатели не сокращаются и в сумме 1 никак не выйдет). Следовательно, мы должны рассмотреть другую возможность - когда первая дробь равна 1/(2+4). Это значит, что знаменатели остальных дробей складываются из 3+7+8+9, и единственная подходящая сумма - это 15+12. Мы получили, что первые две цифры - это 4+2, вторые две - 8+7, а третья пара цифр - 9+3.

9. (13 баллов) Вася отметил на окружности вершины выпуклого шестиугольника ABCDEF со сторонами AB=BC=CD=2 см и DE=EF=FA=11 см. Чему может быть равен радиус этой окружности?

Ответ: 7 см

Решение: Если Вася переставит на той же окружности точки в несколько другом порядке, то он добьется того, чтобы стороны 2 и 11 чередовались. Для такого шестиугольника все диагонали, соединяющие вершины через одну, одинаковы. Следовательно, все углы у него тоже одинаковы и равны 120 градусам. Зная две стороны и угол между ними, Вася находит длину этой диагонали по теореме косинусов - ее квадрат равен 2*2+11*11+2*11=147. Для определения радиуса тоже можно применить теорему косинусов: $R^2 + R^2 + 2R^2 \cos 120 = 147$, откуда $R^2 = 49$, R=7.

10. **(15 баллов)** Дорога между посёлками Нижнеградский и Верхнеградский идёт сначала по равнине, а потом по склону горы. В одно и то же время из двух концов дороги выехали два велосипедиста. Встретившись в 4.9 км от Нижнеградского, они поехали дальше, доехали до другого посёлка, развернулись и поехали обратно. Вторая их встреча случилась в 9.9 км от Нижнеградского. Найдите расстояние между посёлками, если по равнине велосипедисты едут со скоростью 15 км/ч, на подъёме - 8 км/ч, а на спуске - 24 км/ч.

Ответ: 14 км

Решение: Увы, мы не знаем, на каком из участков пути (равнина или склон) пересекались велосипедисты. Поэтому приходится рассматривать случаи. Пусть x - длина равнинного участка, а y - длина склона.

1. Первая встреча произошла на равнине. Составим уравнение для времени, прошедшего от старта до этой встречи: $4.9/15 = y/24 + (x-4.9)/15$
2. Первая встреча - на склоне. Тогда уравнение имеет вид $x/15 + (4.9-x)/8 = (x+y-4.9)/24$
3. Вторая встреча произошла на равнине. В этом случае составляется уравнение для времени от второй встречи до финиша: $9.9/15 = y/8 + (x-9.9)/30$.
4. Вторая встреча - на склоне. $x/15 + (9.9-x)/24 = (x+y-9.9)/8$

Дальше приходится решать систему уравнений - в зависимости от случая это либо 1+3, либо 1+4, либо 2+3, либо 2+4. Для каждого варианта системы - проверять, что результат не противоречит предположениям (в частности, для уравнения 1 должно получаться $x<4.9$, для уравнения 3 должно быть $x<9.9$). В итоге оказывается возможным только вариант 2+4, когда оба пересечения случились на склоне горы. Для этого варианта $x=4$ км и $y=10$ км, поэтому расстояние между посёлками равно 14 км.